平成１９年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成１８年８月７日（月）　午後１時００分より同３時００分まで

問題冊子頁数（表紙、裏表紙を除いて）：　２頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題【Ⅰ】、問題【Ⅱ】のそれぞれについて最大２枚ずつの解答用紙を使用して別々に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ⅰ】，【Ⅱ】を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

問 1 つぎの x, y, z に関する連立 1 次方程式が解をもつための a に関する条件を求め，そのときの解を求めよ．

$$
\begin{aligned}
&x + y - z = 1 \\
&2x - y + z = -1 \\
&3x + ay + z = -1 \\
&2x - 2y + (a+3)z = a - 7
\end{aligned}
$$

問 2 $n \times n$ 実行列 $\boldsymbol{A}$ が交代行列であるとする．すなわち，$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ である．ここで，“T”は転置を表す． このとき，以下の問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{A}$ の固有値を λ，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とし，$\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A}^H \boldsymbol{x}$ を考えることにより λ は 0 か純虚数であることを示せ. ただし，“H”は複素共役転置を表す.

(ii) $\boldsymbol{I}$ を $n \times n$ の単位行列とすると，$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ は正則であることを示せ.

問 3 $n \times n$ 実行列 $\boldsymbol{A}_n$ の i 行 j 列要素 a_{ij} が

$$
a_{ii} = 1 \ (i = 1, \ldots, n),\ a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = b \ (i = 1, \ldots, n-1), \text{その他の}\ a_{ij} = 0
$$

で与えられているとき，以下の問に答えよ.

(i) $\boldsymbol{A}_n$ の行列式を D_n とおくと，つぎの漸化式が成立することを示せ.

$$
D_n = D_{n-1} - b^2 D_{n-2} \quad (n > 2)
$$

(ii) $b = \dfrac{c}{1+c^2}$ (ただし，$-1 < c < 1$) のとき，$\boldsymbol{A}_n$ は正定であることを示せ.

【数学】（続き）

【II】

問 1 実変数 x の関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$g(x) = (1+x)^{-1/x}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(i) $f(x)$ の $x=0$ に関するテイラー展開 (マクローリン展開) を，x の 3 次の項まで求めよ．

(ii) 極限 $\lim_{x\to 0} g(x)$ を求めよ．

(iii) $g(x)$ の $x=0$ に関するテイラー展開を x の 2 次の項まで求めよ．必要に応じて，関数 $g(x)$ が $|x|<1$ で解析的であるという事実を証明なしに用いてよい．

問 2 x, y, z を正規直交座標系とする 3 次元実ユークリッド空間における楕円面

$$E:\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0)$$

と，原点を通る平面

$$P:\quad lx+my+nz=0 \quad (l,m,n\neq 0)$$

とを考える．以下の問に答えよ．

(i) E と P との共通部分として定まる図形 D の名称を答えよ．

(ii) D 上の点 d の座標を $(x,\,y,\,z)=(p,\,q,\,r)$ とおくとき，p の最大値 p_{max} を求めよ．

(iii) x, y, z 軸にそれぞれ平行な辺をもつ直方体のうち，図形 D を含む最小のものを R とする．R のもっとも長い対角線の長さを L とおくとき，L^2 を求めよ．