平成２０年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成１９年８月６日（月）　午後１時００分より同３時００分まで

問題冊子頁数（表紙、裏表紙を除いて）：　２頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題【Ｉ】、問題【II】のそれぞれについて最大２枚ずつの解答用紙を使用して別々に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】，【II】を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【 数学 】

【I】

問 1 $n \times n$ 実行列 $\boldsymbol{A}_n$ の i 行 j 列要素 a_{ij} が

$$a_{ii} = 1 \ (i = 1, \ldots, n), \ a_{i,i+1} = -b \ (i = 1, \ldots, n-1), \text{その他の } a_{ij} = 0$$

で与えられているとき，$\boldsymbol{A}_n^{-1}$ を求めよ．

問 2 $n \times n$ 実行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$$

と表されているとする．ここで，$\boldsymbol{I}$ は $n \times n$ の単位行列で，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は n 次元実縦ベクトルとし，"T"は転置を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{I} + c_k \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T \quad (k = 1, 2, \cdots)$ と表されることを数学的帰納法を用いて示せ．ただし，$\{c_k\}$ はスカラーの数列である．

(ii) c_k を求め，

$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$$

を求めよ．ただし，t は実数のスカラーであり，$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a} \neq 0$ と仮定する．

問 3 $n \times n$ 実対称行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の i 行 j 列要素をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とする．以下の問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{A}$ はつぎのように表されることを示せ．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T$$

ただし，$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{D}$ はそれぞれ $n \times n$ の直交行列，対角行列である．すなわち，$\boldsymbol{U}$ の i 行 j 列要素を u_{ij}, $\boldsymbol{D}$ の i 番目の対角要素を d_i とすると

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{n} u_{ip} d_p u_{jp}$$

と表される．

(ii) 新しい $n \times n$ 実行列 $\boldsymbol{C}$ の i 行 j 列要素 c_{ij} を

$$c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$$

で定義する．このとき，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ が正定ならば，$\boldsymbol{C}$ も正定であることを 2 次形式

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

を調べることにより証明せよ．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$ である．

【II】

問 1 以下の問に答えよ．

(i) f を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の開区間 K で微分可能な実数値関数とする．f が K において常に条件 $f'(x) > f(x)$ を満たしているものとする．このとき，関数 $g(x) = e^{-x}f(x)$ は K で単調増加であることを示せ．

(ii) f を (i) と同じ条件を満たす関数とすると，K において方程式 $f(x) = 0$ の解は高々 1 個であることを示せ．

(iii) a を，$0 < a < 1$ を満たす定数とする．区間 $(0, \infty)$ において，x を変数とする方程式

$$ae^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

は解を一つだけもつことを示せ．

問 2 n を自然数とし，$\omega = e^{2\pi i/n}$ とおく．ただし，i は虚数単位である．$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

によって定義する．以下の問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{A}$ の各要素の複素共役をとることによって定義される行列を $\bar{\boldsymbol{A}}$ と表記する．$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}} = n\boldsymbol{I}$ が成り立つことを示せ．ただし $\boldsymbol{I}$ は n 次の単位行列である．

(ii) $\det \boldsymbol{A}$ が $\displaystyle\prod_{1 \le j < k \le n} \left(2i\omega^{(j+k)/2-1} \sin \frac{k-j}{n}\pi \right)$ に等しいことを使い，等式

$$n^n = \prod_{1 \le j < k \le n} \left(2 \sin \frac{k-j}{n}\pi \right)^2$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 問 (ii) の結果を使い，積分

$$\iint_{0 \le x \le y \le \pi} \log \sin(y-x)\, dx\, dy$$

を求めよ．