平成２４年度　４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻　　　【専門科目】選択表

下表の科目のうち、選択した２科目に○印を付けること。３科目以上に印されている場合は、本専門科目の全答案を無効にすることがある。

受験番号【　　　　　　】氏名【　　　　　　　　　　】

	論理回路
	機械力学
	工業数学
	基本ソフトウェア
	電気・電子回路
	確率統計
	制御工学
	オペレーションズ・リサーチ

====================（以下、受験者は記入しないこと）====================

整理番号【　　　　　　】

平成２４年度　４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻　入学資格者選考試験問題

【専門科目】

試験日時：平成２３年８月８日（月）　午後１時００分より同４時００分

問題冊子頁数（表紙を除いて）：　１６頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【論理回路】（３）	【機械力学】（４）
【工業数学】（３）	【基本ソフトウェア】（２）
【電気・電子回路】（２）	【確率統計】（２）
【制御工学】（２）	【オペレーションズ・リサーチ】（２）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。別紙の選択表への記入を忘れないこと。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【論理回路】

注意： 各問題はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問題 1

論理関数 $F(v,w,x,y,z)\ \{0,1\}^5 \rightarrow \{0,1\}$ は $v-2w+3x-2y+z \geq 1$ のとき $F=1$，それ以外のときは $F=0$ を満たす．

(1) F のカルノー図を作成せよ．

(2) v,w,x,y,z がすべて同時に 0 にならないとしたとき，F の最簡積和形論理式を求めよ．

問題 2

6つのキー (A, B, C, D, E, F) を持つキーボードの押下状態を 3 ビットでエンコードしたい．キーボードは A が押されているときには A = 1，押されていないときには A = 0 を出力するものとし，B, C, D, E, F についても同様とする．3ビットのコード出力を P, Q, R とする．コード出力する際には，6つのキーの間に A, B, C, D, E, F の順に優先順位を考え，押されているキーの中で最も優先順位の高いキーが「アクティブ」であるとする．例えば A = 0，B = 1 のとき，C, D, E, F の状態によらず，B がアクティブである．コードは以下のように定義する．A がアクティブであるときには (P, Q, R) = (0, 0, 1) とする．これを A(001) と書き，同様に B(010)，C(011)，D(100)，E(101)，F(110) とする．何も押されていないときには (PQR) = (000) を出力するものとする．

(1) 上記エンコーダについて，6 入力 A, B, C, D, E, F，3 出力 P, Q, R の真理値表を記述せよ．なお，don't care の記号 * を使用して良い．

(2) P, Q, R を A, B, C, D, E, F のできるだけ簡単な積和形論理式で表せ．

（論理回路の問題は次ページに続く）

問題３

次の (a)~(c) の条件を満たす，入力と内部状態によって出力が定まる順序回路 を考える．

(a) 入力集合：{0, 1}

(b) 出力集合：{00, 01, 11, 10}

(c) 時刻 $t-2, t-1, t$ の入力に対し，時刻 t に以下の出力を返す．ただし $*$ は 0, 1 を問わない．

入力（時刻 $t-2, t-1, t$）	出力（時刻 t）
$*10$	01
101	10
111	11
上記以外	00

(1) この順序回路に対し，状態数が最小の状態遷移図を作成せよ．

(2) JK フリップフロップと AND, OR, NOT 素子を用いて，できるだけ構成要素が少ない論理回路を構成せよ．

（論理回路の問題はここまで）

【機械力学】

注意：問題１，問題２はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問題１

図１に示すように，質量Mの台車が平面上を速度Vで右方向に走行して，直角の段差に近づいている．台車の前後輪は軸間隔がLであり，車輪の大きさはLと比して無視できるほど小さい．段差の大きさはbである．図１に示した状態の後，前輪が段差を越えた瞬間から，重力による車体の落下が始まり，前輪は再び水平面に接触する．台車の重心は前後輪の中央にある．前後輪の軸まわりについて台車の慣性モーメントは等しく，その値は$ML^2/2$である．重力加速度はgとおく．前輪が水平面に接触するまでの現象について，系は保存系として以下の問いに答えよ．さらに，bはLと比して十分に小さいとして近似解を求めよ．なお，この間，台車は車輪以外で水平面と接触することはないと仮定する．

(1) 前輪が段差を越えた後，水平面に再接触するまでに経過する時間を求めよ．ただし，速度Vが小さいため，この間，後輪は段差より左側にあり，水平面上を転動している．重力の作用による台車の回転に注意せよ．

(2) 速度Vが大きくなると，前輪が水平面に再接触するまでに，後輪も段差を越える場合がある．このようになる条件をVの下限値V_0として求めよ．さらに，$V=\sqrt{2}V_0$とすると，前輪が水平面に接触する瞬間の後輪と右側水平面の距離はいくらになるか．

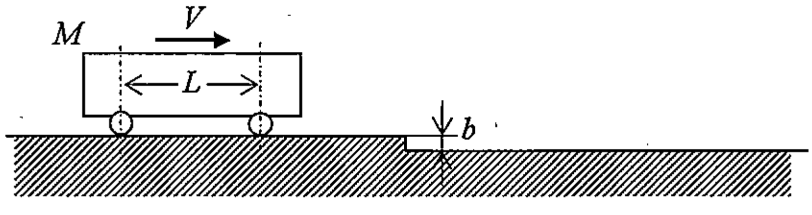


図１

（機械力学の問題は次ページに続く）

問題２

図２に示すように，質量mの剛体フレームは一辺の長さaの正方形となっており，質量mで長さlの剛体棒二本で天井面から吊り下げられている．剛体棒の両端は摩擦の無視できるピン継手であり，上端は固定面，下端はフレーム下側の左右頂点に取り付けられている．剛体棒の重心は棒の中央で，重心まわりの慣性モーメントは$ml^2/12$とする．固定面上にあるピン継手の間隔はaで，鉛直面内でこのフレームが自由に揺動するとき，フレームは回転しない．さらに，フレームの上辺中央から，質量の無視できる長さlの糸と質量mの質点からなる単振子を吊り下げられるようになっている．重力加速度はgとおく．系は保存系と仮定して以下の問に答えよ．

(1) 単振子を付けないフレームだけで自由に揺動させるとき，角変位θは微小として周期を求めよ．

(2) フレームに単振子を付加すると二自由度系となる．揺動の固有角振動数を一次モード，二次モードについてそれぞれ求めよ．(1)と同様に角変位θ, φは微小とする．

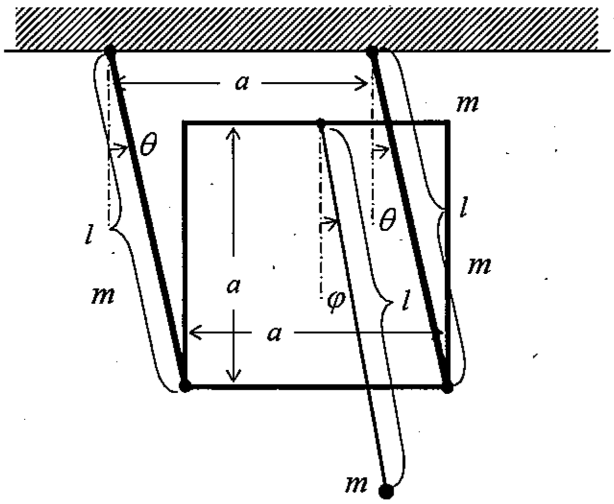


図２

（機械力学の問題はここまで）

【工業数学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

記号 i は虚数単位を表すものとする．

問題1

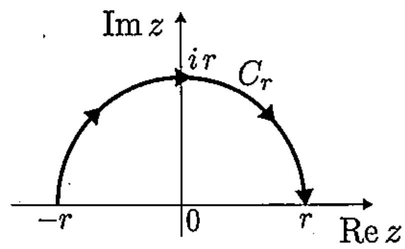
以下の設問に答えよ．

(1) 複素数 $(1+i)^2$ の絶対値と偏角を求めよ．

(2) 領域 $\mathrm{Re}\, z^2 \leq 1$ を複素平面上に図示せよ．

(3) 逆正弦関数 $\sin^{-1} z$ を対数関数を用いて表せ．

問題2



複素関数 $f(z) = \dfrac{1 - e^{iz}}{z^2}$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $f(z)$ を $z=0$ のまわりでローラン展開せよ．

(2) C_r を右上図の太い矢印線に示すような，円周 $|z|=r$ 上で $z=-r$ から $z=r$ に至る半円弧の積分路とする（r は正の実数）．このとき $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz$ を計算せよ．

(3) $f(z)$ についての複素積分を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ の値を求めよ．

問題3

$f(z)$ を，円板 $D = \left\{ z \,\middle|\, |z| \leq a \right\}$ を含むある領域において正則な関数とする（a は正の実数）．以下の設問に答えよ．

(1) 円板 D において $\overline{f(z)}$ が z の関数として正則であるとき，$f(z)$ は定数であることを示せ．ここで，$\overline{f(z)}$ は $f(z)$ の複素共役を表す．

(2) 円板 D において $|f(z)|$ が定数であるとき，$f(z)$ 自体も定数であることを，設問 (1) の結果を利用して示せ．

(3) C を非負の実数として，円周 $|z|=a$ 上で $|f(z)|=C$ とする．さらに，$f(z)$ は円板 D において定数でないとする．このとき，$C \neq 0$ を示せ．

(4) C を非負の実数として，円周 $|z|=a$ 上で $|f(z)|=C$ とする．さらに，$f(z)$ は円板 D において定数でないとする．このとき，$f(z)$ は円板 D 内に零点をもつことを示せ．

【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1

以下の 3 つの C 関数 f(), g(), h() について設問 (1)〜(4) に答えよ．

```
int f(int *a, int n) {
  int i, j, k = n>>1;
  int x = a[k], y;
  a[k] = a[n-1];
  for (i=0,j=0; i<n-1; i++) {
    if ((y=a[i])>x) {
      a[i] = a[j];  a[j] = y;  j++;
    }
  }
  a[n-1] = a[j];  a[j] = x;
  return(j);
}
void g(int *a, int n) {
  int m;
  if (n<=1) return;
  m = f(a, n);
  g(a, m);  g(a+m+1, n-m-1);
}
int h(int *a, int n, int x) {
  int i, j, k;
  for (i=0,j=n,k=n>>1; i<j-1; k=(i+j)>>1) {
    if (x>a[k])  (a)________;
    else         (b)________;
  }
  return(i);
}
```

(1) 関数 g() を

```
int x[10]={ 5,10,15,12, 3,16, 9, 6, 0,19};
g(x, 10);
```

として実行後の x[i] の値を $i=0$ から $i=9$ まで順に示せ．

(2) 関数 h() の中の下線部 (a) と (b) に適切な代入文を補って，関数 g() と h() を以下の手順で実行した後の z[i] の値が，$i=0$ から $i=4$ まで順に 6, 9, 3, 8, 0 となるようにせよ．

```
int x[10]={ 5,10,15,12, 3,16, 9, 6, 0,19};
int y[5] ={ 6, 0,11, 3,17}, z[5], i;
g(x, 10);
for (i=0;i<5;i++) z[i] = h(x,10,y[i]);
```

(3) 関数 g() の平均時間計算量と最悪時間計算量のオーダーを，引数 n の値を N としてそれぞれ答えよ．

(4) 関数 f() の下線を施した初期化つきの宣言 k = n>>1 を k = 0 としても関数 g() の機能や時間計算量のオーダーは変わらないが，実用の観点からは k = n>>1 のほうが好ましいとされている．その理由を簡単に述べよ．

（基本ソフトウェアの問題は次ページに続く）

【基本ソフトウェア】（続き）

問題２

オペレーティングシステムの仮想記憶管理に関する次の設問 (1)〜(4) に答えよ．

(1) ページング方式による仮想記憶管理を考える．以下の参照列に関して，(A) FIFO, (B) LRU それぞれの置換えアルゴリズムを用いた場合の置換え対象のページ枠内容の推移を表で示し，ページフォルト回数を答えよ．ただし，ページ枠は 4 とし，初期状態は空とする．
参照列：1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 5, 1, 2, 4, 5, 3, 4, 5

(2) [a], [b], [c], [d] に入れるべき数式あるいは数値を答えよ．
キャッシュメモリのアクセス時間を Tc, 主記憶装置のアクセス時間を Tm ，キャッシュメモリに対するヒット率を α とすると，主記憶装置の実効アクセス時間 T は

T = [a]

で表すことができる．Tc =10 ナノ秒, Tm =0.1 マイクロ秒, α =0.8 であるとき，

T = [b] ナノ秒 となる．

次に，キャッシュメモリの容量を増やしたら T が 4 ナノ秒改善された．これはキャッシュメモリの容量を増やすことによって，ヒット率 α が [c]（小数点以下第 3 位を四捨五入）になったことを意味する．キャッシュメモリの容量を増やすことなく，T を 4 ナノ秒改善するためには Tc の値が [d] ナノ秒（小数点以下を四捨五入）であるような性能のキャッシュメモリを用いる必要がある．

(3) 仮想記憶管理には参照の局所性の概念が用いられる．以下の C 関数 **func1** における各変数の参照にはどのような局所性が見られるか，すべて列挙して説明せよ．

```
#define N 10000
int func1(int a[][N], int m)
{
    int i,j,sum=0;
    for(i=0;i<m;i++)
        for(j=0;j<N;j++)
            sum += a[i][j];
    return sum;
}
```

```
#define N 10000
int func2(int a[][N], int m)
{
    int i,j,sum=0;
    for(j=0;j<N;j++)
        for(i=0;i<m;i++)
            sum += a[i][j];
    return sum;
}
```

(4) 設問(3) の C 関数 **func1** と **func2** を実行したとき処理時間に差があった．処理時間が短い方はどちらか解答し，その理由を説明せよ．

（基本ソフトウェアの問題はここまで）

【電気・電子回路】

注意：　問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題1　図1に示す回路において，破線の枠内は開放時の端子電圧がEで内部抵抗がrの直流電圧源であり，Rは抵抗，Lはインダクタ，Cはキャパシタである．スイッチSが接点aに接続されて十分時間が経過し，回路が定常状態にあるものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 抵抗Rで消費される電力Pを求めよ．

(2) 設問(1)の結果を用いて，rを固定しRを変化させたときに，Pが最大となるRの値を求めよ．

(3) いま，時刻$t=0$でスイッチSを接点bに接続する．このとき，キャパシタの端子電圧$v_C(t)$, $t \geq 0$ (図中の矢印の向きを正とする) について，次の定係数2階線形常微分方程式が成立する．

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + A_1\frac{dv_C}{dt} + A_0v_C = 0$$

係数A_1, A_0を求めよ．

(4) 設問(3)の微分方程式を解いて，キャパシタの端子電圧$v_C(t)$, $t \geq 0$を求めよ．

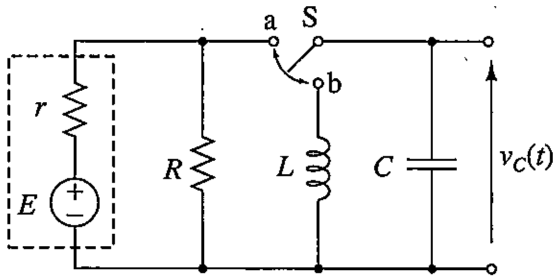


図1

(電気・電子回路の問題は次ページに続く)

【電気・電子回路】（続き）

問題2 以下の設問に答えよ．但し，ダイオードは順方向電圧に対しては短絡，逆方向電圧に対しては開放として動作するものとする．

(1)　図 2(a) の回路において，E は直流電圧源，C はキャパシタ，R は抵抗である．スイッチ S は閉じており，回路は定常状態にあるものとする．ここで，時刻 $t=0$ において，スイッチ S を開いた．時刻 $t \geq 0$ における抵抗 R にかかる電圧 V_a を図中の矢印の向きを正とし，t の関数として求めよ．

(2)　図 2(b) の回路において，正弦波交流電圧源は，その瞬時値が $|E_0|\sin(\omega t)$ であるとする．また，C はキャパシタ，R は抵抗であり，C と R の積，即ち CR の値は電源電圧の周期 $T=2\pi/\omega$ と比べて非常に大きいものとする．スイッチ S を閉じてから十分な時間が経過した後，抵抗 R にかかる電圧 V_b（図中の矢印の向きを正とする）として，わずかなリップル分を含む直流電圧が観測された．この直流電圧の近似値として最も適切なものを以下の（ア）から（オ）の中から選択し，その理由を設問 (1) の解答を使って説明せよ．

（ア）$|E_0|$　（イ）$\dfrac{|E_0|}{2}$　（ウ）$\dfrac{|E_0|}{3}$　（エ）$\dfrac{|E_0|T}{RC}$　（オ）$\dfrac{\sqrt{2}|E_0|T}{RC}$

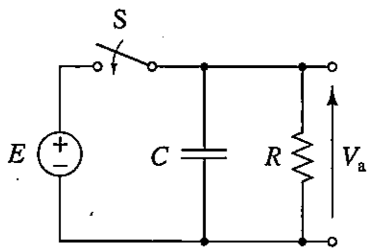


図 2 (a)

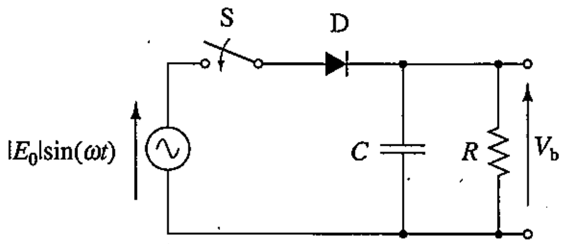


図 2 (b)

（電気・電子回路の問題は次ページに続く）

【電気・電子回路】（続き）

問題２（続き）

(3)　図 2(b) の回路と同じ正弦波交流電圧源，キャパシタ ($C_1 = C_2 = C$)，抵抗，ダイオードを使用して図 2(c) の回路を構成した．スイッチ S を閉じてから十分な時間が経過した後，抵抗 R にかかる電圧 V_c（図中の矢印の向きを正とする）としてどのような電圧が観測されるか，設問 (2) における V_b と比較する形で述べよ．

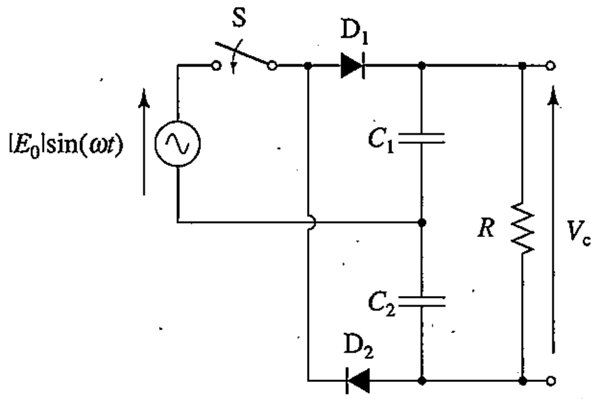


図 2 (c)

(電気・電子回路の問題はここまで)

【確率統計】

問題 1 以下の設問に答えよ．

(i) 確率変数 X が平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従うとき，$X\mathrm{sgn}(X) = |X|$ の平均，分散を求めよ．ただし，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ は符号関数である．

(ii) 確率変数 X, Y の結合確率密度関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

とする．ただし，$\sigma_x > 0$，$\sigma_y > 0$，$-1 < \rho < 1$ である．このとき，上式右辺の指数部の 2 次形式を平方完成し，変数変換を用いることにより σ_x，σ_y，ρ はそれぞれ X, Y の標準偏差，および，X と Y の相関係数であることを示せ．

(iii) (ii) の X, Y に対し

$$r = E[X\mathrm{sgn}(Y)]$$

とおく． ここで，$E[\cdot]$ は期待値を表す．このとき，

$$r = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} h(x,y)dxdy$$

と積分表現したときの $h(x,y)$ を $f(x,y)$ などを用いて表せ．

(iv) (ii) と同様にして

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2}\right)\right)(g(x;\rho) - g(x;-\rho))dx$$

であることを示せ．ただし，

$$g(x;\rho) = \int_{-\frac{\rho x}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

である．

(v) 部分積分法を用いて r を求めよ．

（確率統計の問題は次ページに続く）

【確率統計】(続き)

問題 2 サンプル $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ は互いに独立で平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うとする．ただし，σ^2 は既知とする．また，X を標準正規分布に従う確率変数とするとき標準正規分布の α 点 z_α を $\Pr(X > z_\alpha) = \alpha$ で定義し，その確率分布関数を $\Phi(x) = \Pr(X \leq x)$ と書く．このとき，以下の設問に答えよ．

(i) 標本平均 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ の従う分布を示せ．

(ii) 帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ を対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ に対して有意水準 (第一種誤り確率; H_0 が真のとき H_1 を採択する確率) α で検定する両側検定の手続きを述べよ．

(iii) 帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ を対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$ に対して有意水準 α で検定する右片側検定の手続きを述べよ．また，対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$ に対して有意水準 α で検定する左片側検定についても述べよ．

(iv) 検定の検出力は H_1 が真のとき H_1 を採択する確率で与えられる．(ii),(iii) の両側検定，右片側検定，左片側検定の検出力をそれぞれ P_{D1}, P_{D2}, P_{D3} とするとき，これらを $\Phi(\cdot)$ を用いて表せ．また，等式 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ に注意し，$\sqrt{n}|\mu - \mu_0|/\sigma < z_\alpha$ を満たす μ に対して，有意水準 α の右および左片側検定の検出力が同じ有意水準の両側検定の検出力より大きいことを示せ．

(v) 右片側検定で帰無仮説を $\mathrm{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ として (iii) と同じ検定手続きを用いても有意水準は α 以下になることを示せ．同様に，左片側検定で帰無仮説を $\mathrm{H}_0 : \mu \geq \mu_0$ として (iii) と同じ検定手続きを用いても有意水準は α 以下になることを示せ．

(確率統計の問題はここまで)

【制御工学】

問題 1　システムの挙動が次式の微分方程式で記述される系を考える.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &= -10x(t) + u(t) \\
y(t) &= -99x(t) + 10u(t)
\end{aligned}
$$

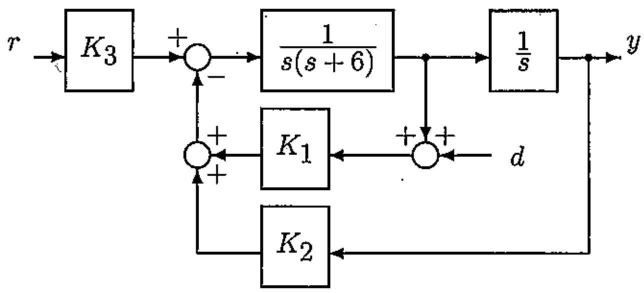
この系の入力は $u(t)$, 出力は $y(t)$ であり, $x(t)$ はシステムの挙動を記述するためのスカラー変数である. このとき, 下記の設問に答えよ.

(a)　この系の伝達関数を求めよ.

(b)　設問 (a) で求めた伝達関数のボード線図（ゲイン線図と位相線図）を描け. ただし, ゲイン線図は折れ線近似で良い.

(c)　初期条件 $x(0) = 0$ のもとで, この系のステップ応答（入力として単位ステップ関数が加わった時の出力 $y(t)$）を求めよ.

問題 2



上図に示す制御系に関して下記の設問に答えよ. ただし, K_1, K_2, K_3 は定数ゲインとする.

(a)　この系における r から y までの伝達関数 $G_{yr}(s)$ および d から y までの伝達関数 $G_{yd}(s)$ を求めよ.

(b)　この系が安定となるためにゲイン (K_1, K_2) が満たすべき条件を求めよ.

(c)　$r(t) \equiv 0$ とする. 外乱として $d(t) = \sin 2t$ が加わったときに, 出力は定常状態において $y(t) = \sin 2t$ であった. このときの, K_1 と K_2 の値を求めよ.

(d)　$d(t) \equiv 0$ とする. 設問 (c) で求めたゲイン (K_1, K_2) のもとで, $y(t)$ がステップ目標値 $r(t)$ に定常偏差なく追従するように K_3 の値を定めよ.

【オペレーションズ・リサーチ】

注意：　オペレーションズ・リサーチの問題は選択問題 I か II のいずれかを選択して答えなさい．(選択問題 I と II の両方を解答した場合は無効とする．)

選択問題　I

客が 1 人ずつ到着率 λ_1 のポアソン過程に従って到着し，1 人ずつ先着順にサービスを受ける無限バッファ待ち行列モデルを考える．サーバは 1 人で，各客のサービス時間は独立で平均が $1/\mu$ の指数分布に従うものとする．平衡状態の存在を仮定し，以下の設問に答えよ．

問 1　任意時点におけるシステム内客数が従う分布の確率母関数を示せ．

問 2　客がシステムに到着してから退去するまでの時間であるシステム内滞在時間が従う分布を示せ．

上で述べた到着客に加えて，客が 2 人ずつ同時に到着率 λ_2 のポアソン過程に従って到着し，同じ待ち行列に加わる場合を考える．但し，同時に到着した客もサービスは個別に受け，サービス時間は上と同じく独立で平均が $1/\mu$ の指数分布に従うものとする．平衡状態の存在を仮定し，以下の設問に答えよ．

問 3　任意時点でシステム内客数が n である確率を p_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で表すとき，これらが満たす平衡方程式を示せ．さらにこの p_n の確率母関数 $\Pi(z)$ を導出せよ．

問 4　客には 1) 1 人で到着する客，2) 2 人で到着し先にサービスされる客，3) 2 人で到着し後でサービスされる客　の 3 種類の客があることに注意し，任意の客が到着してから退去するまでの時間の確率分布の LST(Laplace Stieltjes transform) を求めよ．

(選択問題 I　終了)

注意：　オペレーションズ・リサーチの問題は選択問題 I か II のいずれかを選択して答えなさい.（選択問題 I と II の両方を解答した場合は無効とする.）

選択問題 II

問 1. 次の 0-1 ナップザック問題 P を考える.

$$\text{P}: \quad \text{目的関数} \quad z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \longrightarrow \text{最大}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$x_i = 0 \text{ または } 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ここですべての i に対して $a_i, c_i > 0$ かつ $a_i \leq b$ であり，$c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \cdots \geq c_n/a_n$ と仮定する．また問題 P の最適解における目的関数値を z^* とする．この問題 P に対し，x_i の 0-1 制約条件を $0 \leq x_i \leq 1$ に緩和した線形緩和問題 P' の解 $\hat{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は次式で与えられる.

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, 2, \ldots, l) \\ \left(b - \sum_{k=1}^{l} a_k\right) \Big/ a_{l+1} & (i = l+1) \\ 0 & (i = l+2, l+3, \ldots, n) \end{cases}$$

ただし $l = \max\{i \mid \sum_{k=1}^{i} a_k \leq b\}$ である．このとき以下の問に答えよ.

(1) 線形緩和問題 P' の解を用いて元の問題 P における目的関数値 z の上界値を与えよ.

(2) $\bar{c} = \max_{1 \leq i \leq n} c_i$ で定義される $\bar{c}$ に対し，問題 P の最適解における目的関数値 z^* が $z^* = \bar{c}$ となるのはどのような場合か一つ答えよ.

(3) 問題 P で c_i/a_i の大きい順に品物を詰めていき，詰められなくなったら終了するという貪欲解法を考える．貪欲解法で得られる目的関数値を z_g とするとき，以下の不等式が成立することを示せ.

$$\max\{\bar{c}, z_g\} \leq z^* \leq \bar{c} + z_g$$

(4) 最大 10kg の品物が入る袋に対し，以下の表から品物を選んで合計金額が最も大きくなるように袋詰めをしたい.

品名	A	B	C	D	E	F	G	H
重量 (kg)	2	1	5	3	1	2	4	3
金額 (千円)	10	3	12	4	2	7	4	12

品物は各 1 個ずつとする．この袋詰めの問題に対し，貪欲解法を適用した場合の結果を示せ.

（オペレーションズ・リサーチ 選択問題 II は次ページに続く）

選択問題 II (続き)

問 2. 次の非線形計画問題 Q について以下の問に答えよ.

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{Q}: & \text{目的関数} & 2x_1^2 + 7x_2^2 - 6x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \text{最小} \\
 & \text{制約条件} & x_1 + x_2 \ \leq \ 9 \\
 & & \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2)
\end{array}
$$

(1) 問題 Q に対するカルーシュ・キューン・タッカー (KKT) 条件を求めよ.

(2) 問題 Q の最適解を求めよ.

(オペレーションズ・リサーチの問題はここまで)