平成２８年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻　入学資格者選考試験問題

【専門科目】

試験日時：平成２７年８月６日（木）　午後１時００分より同４時００分まで

問題冊子頁数（表紙を除いて）：　１６頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【論理回路】（３）	【機械力学】（４）
【工業数学】（３）	【基本ソフトウェア】（２）
【電気・電子回路】（２）	【確率統計】（２）
【制御工学】（３）	【オペレーションズ・リサーチ】（２）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。別紙の選択表への記入を忘れないこと。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【論理回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1

以下の設問に答えよ．

(1) 以下の論理式と異なる項を持つ最簡積和形論理式で，以下の論理式と等価なものを二つ答えよ．

$$\overline{A}C + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}BD + AB\overline{C}$$

(2) 2 入力の排他的論理和 (XOR) をできる限り少ない NAND 素子で構成し，回路を示せ．

問題 2

クロックと同期しながらクロック毎に入力 X, Y, Z を受け付ける同期回路を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 第 t クロックにおける入力 X, Y, Z のうち真であったものの個数を s_t とする．s_t を 2 進数 A_1A_0 で表すとき，A_1, A_0 を X, Y, Z の最簡積和形論理式で示せ．

(2) $s_1, s_2, \ldots, s_t$ の和を 4 で割った余りを p_t とする．p_t を 2 進数 $Q_1^{(t)}Q_0^{(t)}$ で表すとき，$Q_1^{(t)}, Q_0^{(t)}$ をそれぞれ $A_1, A_0, Q_1^{(t-1)}, Q_0^{(t-1)}$ の最簡積和形論理式で示せ．

(3) $Q_1^{(t)}, Q_0^{(t)}$ をそれぞれJK フリップフロップの状態で表す．初期状態を $(Q_1^{(0)}, Q_0^{(0)}) = (0, 0)$ とする．二つのJK フリップフロップの入力をそれぞれ $X, Y, Z, Q_1^{(t-1)}, Q_0^{(t-1)}$ の最簡積和形論理式で示せ．

（論理回路の問題は次ページに続く）

問題3

表1の状態遷移表によって定義される順序回路について以下の設問に答えよ．なお，表中の X/Y の表記は次状態 X と出力 Y を示している．例えば，状態 A において入力 0 が与えられると 0 を出力し，状態 E に遷移する．

(1) 状態の併合によって状態数をできるだけ減らし，併合後の状態に状態名を割り当てた状態遷移表を示せ．

(2) 求めた状態遷移表を実現する順序回路を D フリップフロップと AND, OR, NOT 素子を用いて記述せよ．

表 1: 状態遷移表

現状態	入力 0	入力 1
A	E/0	D/1
B	F/0	D/0
C	E/0	B/1
D	F/0	B/0
E	C/0	F/1
F	B/0	E/0

（論理回路の問題はここまで）

【機械力学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題1

図1に示すように，一様な剛体棒の両端に質量の無視できる小さなローラーが取り付けられ，ローラーは鉛直面内にある円形溝の中を動くように拘束されている．これにより，剛体棒は，鉛直面内で平面運動を行うと仮定する．棒の両端を点A，点B，円の中心を点Oとするとき，OA, OB のなす角は90度とする．棒の質量は M，長さは L であり，両端にあるローラー間の距離も L となる．剛体棒は細く，重心まわりの慣性モーメントに断面積の寄与はないものとする．摩擦，空気抵抗の作用などが無視できる保存系として以下の設問に答えよ．重力加速度は g で表わす．

(1) 剛体棒が水平（$\theta = 0$）のとき，ポテンシャルエネルギーは極小となる．棒がこの平衡点の付近で，微小振幅の揺動を生じるとき，この自由振動の固有角振動数を求めよ．

(2) 剛体棒を鉛直の状態で静止させ，これを静かに解放すると，棒が時計回りに90度向きを変えて，水平になった．この瞬間における点Aの速さを求めよ．

(3) 前問の条件で，剛体棒が水平になった瞬間に溝から点Aのローラーに鉛直面内で作用する力の大きさを求めよ．

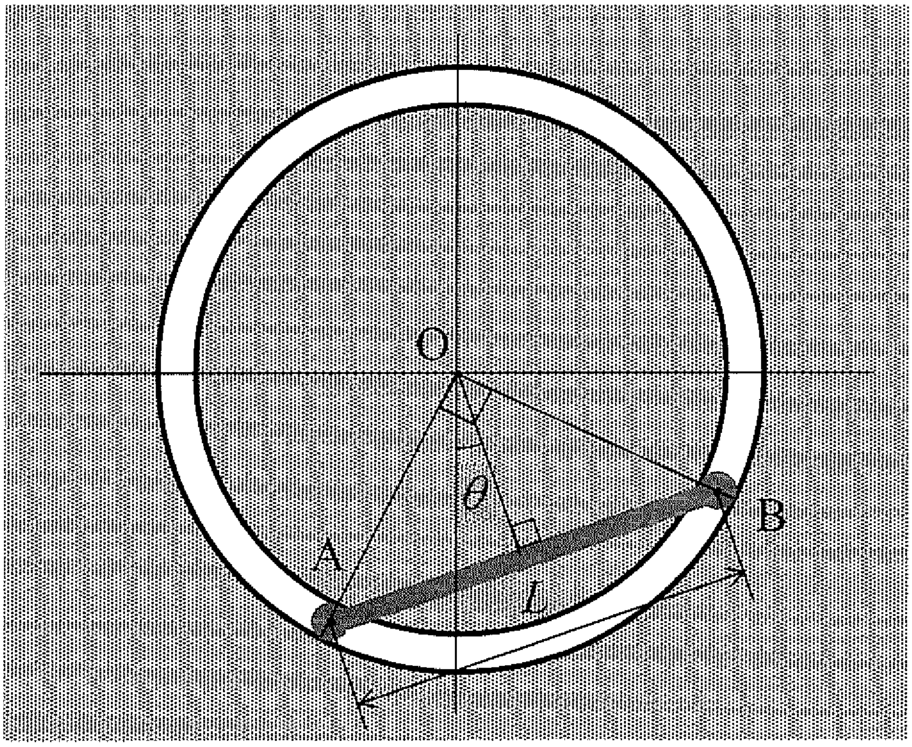


図1

（機械力学の問題は次ページに続く）

【機械力学】（続き）

問題2

図2に示すように，均質で一様断面を持つ長方形板が，その重心を中心として水平面内で回転できるよう回転軸に取り付けられている．長方形板の長辺と短辺の長さをそれぞれ l と a，質量を M とする．回転の中心を原点Oとして図2のように x 軸と y 軸をとり，反時計回りを正方向として x 軸から見た長辺方向中心軸の角度を θ とする．同じ水平面内において，質量 m の質点が x 軸方向速度 $-v$ $(v > 0)$ で $y = h$ $(h > 0)$ の直線上を運動し，静止した長方形板の長辺に衝突した．摩擦，空気抵抗の作用などは無視でき，衝突は完全弾性衝突として，以下の設問に答えよ．

(1) 長方形板の重心まわりの慣性モーメントを求めよ．

(2) 衝突前に $\theta = \pi/2$ であったとして，衝突直後における質点の x 軸方向速度と長方形板の角速度 $\dot{\theta}$ をそれぞれ求めよ．

(3) 衝突前の θ が $0 < \theta < \pi/2$ を満たしていたとして，衝突直後における長方形板の角速度 $\dot{\theta}$ を求めよ．

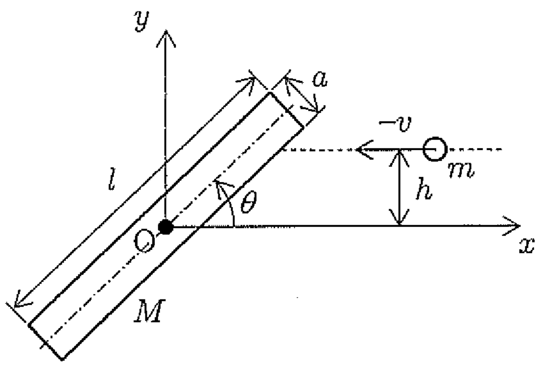


図2

（機械力学の問題はここまで）

【工業数学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

以下全ての問題において i および e はそれぞれ虚数単位および自然対数の底を表す．$\mathrm{Re}\, z$，$\mathrm{Im}\, z$ はそれぞれ複素数 z の実部と虚部を表す．また実数全体の集合を $\mathbb{R}$，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す．

問題 1 以下の設問に答えよ．

(1) 次の関数を z についてのべき級数（負べきを含んでよい）として2通りに表示せよ．

$$f(z) = \frac{1}{z(1+2z^2)}$$

(2) 複素平面 $\{z = x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 上の領域 $\{z = x+iy \mid 0 \le x \le \pi,\ 1 \le y \le 2\}$ を $w = \sin z$ によって変換した．結果として得られる複素平面 $\{w = u+iv \mid u, v \in \mathbb{R}\}$ 上の領域の面積を求めよ．

(3) $0 < a < 1$ とする．以下の積分を計算せよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+a\cos\theta)^2}$$

問題 2 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で定義された実数値関数 $f(z)$ が Ω において調和関数であるとは，$z = x+iy$ とおいて f を2つの実変数 x, y の関数とみなしたときに2階までの偏導関数が存在して連続であり，条件

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つことである．以下の設問に答えよ．

(1) 領域 Ω において正則な関数の実部，虚部をそれぞれ $u(z)$，$v(z)$ とおく．すなわち $u(z)+iv(z)$ は Ω において正則であるとする．このとき，実数値関数 $u(z)$，$v(z)$ はともに Ω において調和関数であることを示せ．

(2) 関数 $g(z)$ は領域 Ω において正則で値0をとらないとする．$\log|g(z)|$ は Ω において調和関数であることを示せ．

（工業数学の問題は次ページに続く）

問題 3 以下の設問に答えよ．

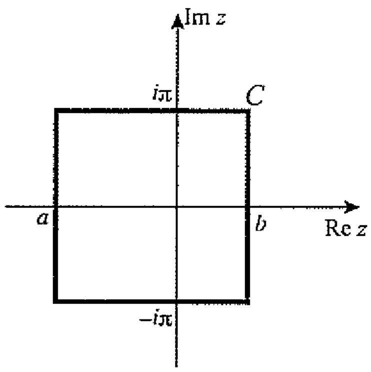
(1) 下図のように，閉路 C を領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}\, z < b,\ -\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$ の境界として定義する．この閉路 C に沿った反時計回りに一周した積分

$$\int_C e^{e^z} dz$$

の値を考察することにより，実数 c に対して定義された積分

$$I_c = \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{c+i\theta}} d\theta$$

が c の値によらないことを示せ．



(2) 積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$$

の値を求めよ．

【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題 1

以下に示す C 言語の関数 f(a,n) は，n 要素 $(n > 0)$ の配列 a をソート (sort) するものである．ただし a の各要素は int 型の要素 key を持つ構造体 s へのポインタであり，ソートは key の昇順 (ascending order) で行われる．この関数 f() とそのソートアルゴリズム (以下 A と呼ぶ)，および f() から呼び出される関数 g() と h() について，設問 (1)〜(4) に答えよ．

```
void h(struct s **b, int n) {
  struct s *c = b[n];  int x = c->key;
  while (n>1) {
    int m = n>>1;
    if (b[m]->key>=x)  break;
    b[n] = (a)_________ ;  n = m;
  }
  b[n] = c;
}
void g(struct s **b, int n) {
  struct s *c = b[n];
  int x = c->key, i = 1, j = 2, k;
  b[n] = (b)_________ ;
  n--;
  while (j<=n) {
    int y = b[j]->key, z = b[j+1]->key;
    if ((c)_________)  break;
    k = ((d)_________) ? j : j + 1;
    b[i] = b[k];  i = k;  j = i<<1;
  }
  b[i] = c;
}
void f(struct s **a, int n) {
  int i;
  for (i=2; i<=n; i++) h(a-1, i);
  for (i=n; i>1; i--)  g(a-1, i);
}
```

(1) 下線部 (a)〜(d) を埋めて，関数 h() と g() を完成させよ．

(2) A の最悪時間計算量のオーダを，ソート対象のデータ数を N として求め，その理由を簡潔に示せ．

(3) A と最悪時間計算量のオーダが等しいソートアルゴリズムを一つ挙げよ．

(4) A と設問 (3) で挙げたアルゴリズムとを，作業領域量のオーダと安定性 (stability) の観点で比較し，両者の優劣を簡潔に議論せよ．

（基本ソフトウェアの問題は次ページに続く）

問題2

ページング方式による主記憶のページ置換えを考える．参照列 R に対し m 個のページ枠を使用してページ置換えを行う場合に発生するページフォルト回数を $F(m)$ とするとき，以下の設問に答えよ．ただし，初期状態においてページ枠の内容はすべて空とする．

(1) 次の R に対して，LRU（Least Recently Used）置換えアルゴリズムを用いた場合の $F(3)$ の値を求めよ．

$R = 0, 2, 3, 1, 3, 2, 4, 0, 2, 3, 1, 4$

(2) (1) の R に対して，LRU 置換えアルゴリズムを用いた場合の $F(4)$ の値を求めよ．

(3) (1) の R に対して，OPT 置換えアルゴリズムを用いるとページフォルト回数が最小となる．このときの $F(4)$ の値を求めよ．

(4) 次の (a), (b) の置換えアルゴリズムを用いた場合に，$F(m) < F(m+1)$ となる R, m が存在するか否かをそれぞれ答えよ．存在する場合は R, m の具体例とページ枠の内容の推移を図示せよ．

(a) FIFO（First In First Out）

(b) LRU

【電気・電子回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること

問題1　図1，2，3において，R，R_1，R_2は抵抗，C_1，C_2はキャパシタ，L，L_1，L_2はインダクタ，E_0は直流電圧源，$e(t)$は振幅E，角周波数ωの交流電圧源$e(t)=E\sin(\omega t)$とする．以下の設問に答えよ．

(1) 図1の回路において，時刻$t=0$でスイッチSを閉じたとき，流れる電流i及びキャパシタC_1とC_2の電荷をtの関数としてそれぞれ求めよ．ただし，$t=0$で端子AとBの電位はそれぞれE_1，0とする．

(2) 図2の回路において，時刻$t=0$でスイッチS_1を閉じ，$t=t_1$ ($t_1>0$)でさらにスイッチS_2を閉じたとき，流れる電流iをtの関数として求め，概形を図示せよ．ただし，$t=t_1$における電流$i=I_0$を解答に使用して良い．

(3) 図3の回路において，スイッチSを開いた状態でL_1に交流電圧$e(t)=E\sin(\omega t)$が印加されており，L_1とL_2の間の相互インダクタンスをMとする．$e(t)=0$の瞬間にスイッチSを閉じた場合と，$e(t)$が最大値の瞬間にスイッチSを閉じた場合のL_2に流れる電流i_2の最大値をそれぞれ求めよ．

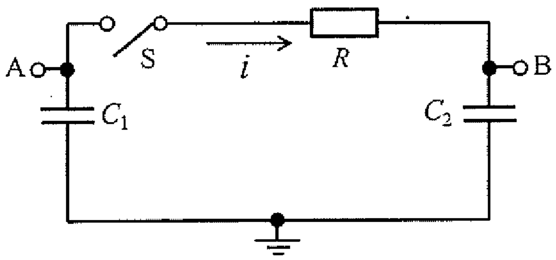


図1

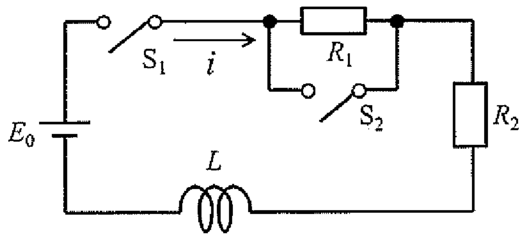


図2

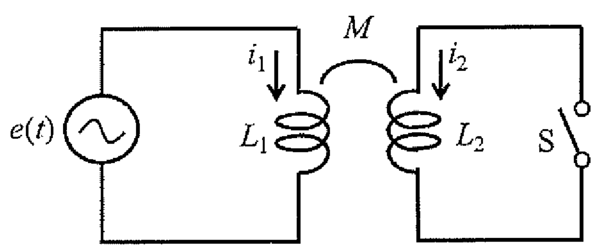


図3

（電気・電子回路の問題は次ページに続く）

【電気・電子回路】（続き）

問題2 以下の設問に答えよ．ただし，演算増幅器は開ループ利得が A，入力インピーダンスが純抵抗 r，出力インピーダンスが0であるとする．また，R_1, R_2 は抵抗であり，図中の V_i と V_o はそれぞれ回路の入力と出力の電位である．

(1) 図4に示す増幅回路の閉ループ利得 $G = V_\mathrm{o}/V_\mathrm{i}$ を，A, r, R_1, R_2 を用いて表せ．

(2) 図4に示す増幅回路の入力インピーダンスを，A, r, R_1, R_2 を用いて表せ．

(3) 理想的な演算増幅器を用いたときの図5に示す回路の非反転増幅器としての特徴を，閉ループ利得及び回路の入力インピーダンスの点から説明せよ．

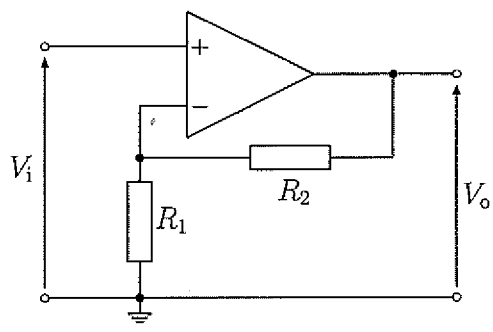


図4

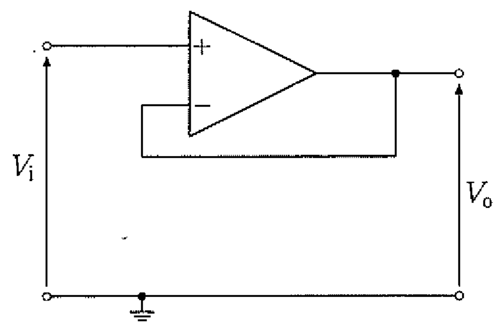


図5

（電気・電子回路の問題はここまで）

【確率統計】

注意：　問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1　確率変数 (X,Y) によって表現される母集団からの大きさ n の無作為標本を $\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)\}$ とする．ここで，X と Y は互いに独立であるとし，$E[X]=\mu_{\rm x}$，$E[Y]=\mu_{\rm y}$，$E[(X-\mu_{\rm x})^2]=v_{\rm x}$，$E[(Y-\mu_{\rm y})^2]=v_{\rm y}$ とする．ただし，$E[\cdot]$ は期待値を表す．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $A=c_{\rm A}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)$ が $\mu_{\rm x}\mu_{\rm y}$ の不偏推定量となるように定数 $c_{\rm A}$ を定めよ．

(2) 設問 (1) の $c_{\rm A}$ を用いた推定量 A の分散を求めよ．

(3) $B=c_{\rm B}\sum_{i=1}^n X_iY_i$ が $\mu_{\rm x}\mu_{\rm y}$ の不偏推定量となるように定数 $c_{\rm B}$ を定めたとき，推定量 B の平均二乗誤差と設問 (1) の $c_{\rm A}$ を用いた推定量 A の平均二乗誤差とを比較せよ．

(4) 母集団分布が正規分布のとき，設問 (1) の $c_{\rm A}$ を用いた推定量 A が $\mu_{\rm x}\mu_{\rm y}$ の最尤推定量であることを示せ．

(確率統計の問題は次ページに続く)

問題2 以下の設問に答えよ．

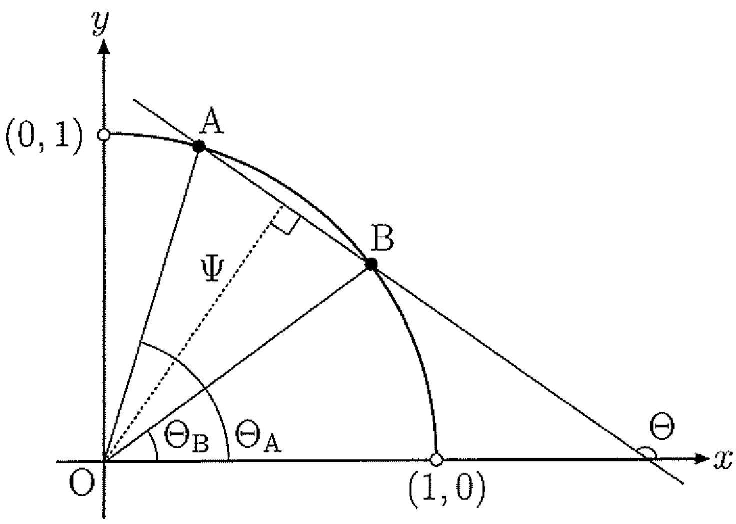
(1) 確率変数 X, Y が独立で同じ分布にしたがうとき，$U = X + Y$ と $V = X - Y$ が一般に独立であるかどうか，一般に無相関であるかどうか，についてそれぞれ理由をつけて答えよ．

(2) 設問 (1) で確率変数 X, Y がそれぞれ標準正規分布にしたがうとき，U と V が独立であるかどうか，理由をつけて答えよ．

(3) 下図のように xy 平面上に点 $(1,0)$ から点 $(0,1)$ に半径1の原点Oを中心とする円弧を描き，円弧上に2点A, Bを，OAとOBが x 軸とつくる角の大きさ $\Theta_{\mathrm{A}}, \Theta_{\mathrm{B}}$ が独立にそれぞれ区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上の一様分布にしたがうようにとる．Oから直線ABへの垂線の長さを Ψ とし，直線ABが x 軸とつくる角の大きさを Θ としたとき，Ψ と Θ の同時分布の確率密度関数を求めよ．ただし，必要であれば

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

としてよい．



（確率統計の問題はここまで）

【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1　以下の設問に答えよ．

(1) 図 1 のシステムを考える．このとき，

$$P(s) = \frac{2}{s+2}, \quad K_1(s) = \frac{1}{s}, \quad K_2(s) = \alpha$$

ならば，任意の正の実数 α に対して，入力 u から出力 y への伝達関数は安定となる．この事実を示せ．

(2) 図 2 のフィードバック制御系を考える．ただし，$G(s)$ は

$$P(s) = \frac{2}{s^2+3s+1}, \quad K_1(s) = 1, \quad K_2(s) = 1$$

とした場合の図 1 のシステムの伝達関数である．このとき，パラメータ $\beta \in [0, \infty)$ に対する根軌跡の始点と終点を求めよ．

(3) 設問 (2) のフィードバック制御系において $\beta = 1$ とする．このとき，入力 $r(t) \equiv 1$ に対する定常偏差 $\lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$ の値を求めよ．

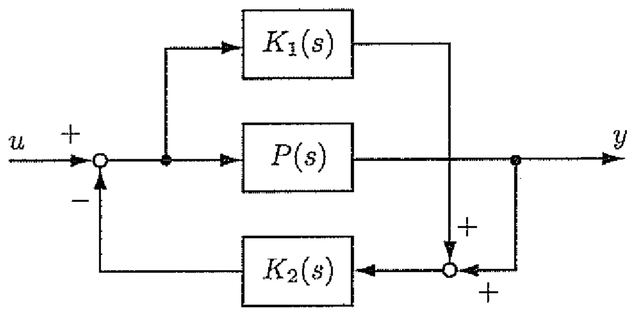


図 1

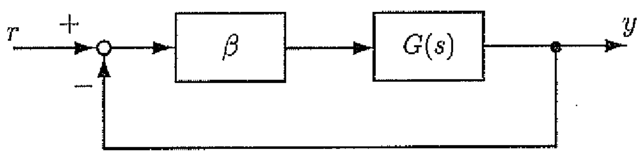


図 2

（制御工学の問題は次ページに続く）

【制御工学】（続き）

問題2　制御対象 $P(s)$ と補償要素 $K(s)$ で構成される図3の制御系に関して，以下の設問に答えよ．ただし，

$$P(s) = \frac{1}{s^2}, \quad K(s) = \frac{s+1}{0.1s+1}$$

とする．

(1) $K(s)$ のゲイン線図（折れ線近似）と位相線図の概形を描け．位相に関しては 表1の概略値を参考にせよ．また，この補償要素の名前と目的・効用について述べよ．

表1.　$G(s) = 1/(s+1)$ の位相

ω (rad/s)	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
$\angle G(j\omega)$ (°)	−1	−1	−3	−6	−11	−27	−45	−63	−79	−84	−87	−89	−89

(2) ナイキストの安定判別法の目的と方法について説明した後，これを用いて図3の制御系が安定か否かを判定せよ．

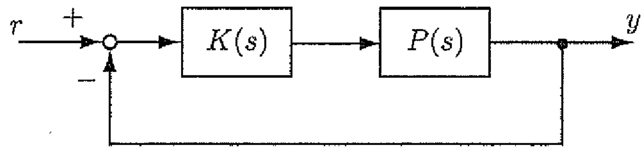


図3

（制御工学の問題はここまで）

【オペレーションズ・リサーチ】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1

客が 1 人ずつ平均 $1/\lambda$ の間隔でポアソン過程に従って到着し，先着順にサービスを受け退去する待ち行列モデルを考える．待合室の容量には制限はない．サーバは 1 人で，サービス時間は平均 $1/\mu$ の指数分布に従っている．この待ち行列モデルの定常状態の存在を仮定し，次の各設問に答えよ．

(1)　任意の客が到着したときに，待たずにサービスを受けられる確率を求めよ．

(2)　サービス中の客と待っている客の合計が 3 人以上になる確率を求めよ．

(3)　任意の客が到着してから，必要であれば待ち行列に並び，サービスを終えて退去するまでの合計時間であるシステム滞在時間の確率分布を求めよ．

サービスを改善するために同じ処理能力を持つサーバを 1 人増員し，合計 2 人にした．この待ち行列モデルの定常状態の存在を仮定し，次の各設問に答えよ．

(4)　任意の客が到着したときに，待たずにサービスを受けられる確率を求めよ．

(5)　客のシステム滞在時間の平均を求めよ．

(オペレーションズ・リサーチの問題は次ページに続く)

問題 2

$\mathbb{Z}_+$ をすべての非負整数からなる集合とする. $\mathbb{Z}_+$ を状態空間に持つ出生死滅過程 $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ を考え, その遷移確率行列 $\boldsymbol{P} := (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ は次式を満たすものとする.

$$P_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} p_i, & i \geq 0,\ j = i+1 \\ r_i, & i \geq 0,\ j = i \\ q_i, & i \geq 1,\ j = i-1 \\ 0, & i \geq 0,\ |j-i| \geq 2 \end{cases}$$

ただし, $p_0 + r_0 = 1$ かつ $p_i + q_i + r_i = 1$ $(i = 1, 2, \dots)$ とする. 以下の各設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{P}$ が既約 (すべての状態が正の確率で到達可能) となるための必要十分条件を示せ.

(2) $\boldsymbol{P}$ が既約であるとする. このとき, 出生死滅過程が非周期的になるための必要十分条件を示せ. また, その必要十分条件が成り立たない場合の周期を求めよ.

(3) $\boldsymbol{P}$ が既約であるとする. このとき, 定常確率ベクトル $\boldsymbol{\pi} := (\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ が存在するための必要十分条件を示せ.

(4) $\boldsymbol{P}$ が次式を満たしているとする.

$$p_i = \frac{1}{4}\left(\frac{i+1}{3i+1}\right), \qquad i \in \mathbb{Z}_+$$

$$q_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{i+2}{3i-2}\right), & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

このとき, $\boldsymbol{P}$ の定常確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が存在するか否かを判定し, その判定結果を根拠と共に述べよ. なお, $\boldsymbol{P}$ の定常確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が存在すると判定した場合には, その定常確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ も書け.

(オペレーションズ・リサーチの問題はここまで)